XV. Ulusal Mekanik Kongresi,03-07 Eylül 2007,ISPARTA

ĶÇERĶSĶNDE DEĴ ĶĶKEN VĶSKOZĶTELĶ AKIĶKAN BULUNAN ÖNGERĶLMELĶ ELASTĶĶK TÜPLERDE NONLĶNEAR DALGA YAYILIMI

Hilmi Demiray
Iкēk Üniversitesi, Matematik Bölümü

Ķile, 34980 Ķstanbul
e-mail: demiray@isikun.edu.tr

ÖZET

Bu çalēкmada, damarē öngerilmeli ve deĵ iкken yarēçaplē ince bir tüp, kanē da viskozitesi radyal doĵ rultuda deĵ iкen ve sēkēкtērēlamayan bir Newton akēкkanē gibi varsayarsak ve indirgeyici pertürbasyon yöntemini kullanarak böyle ortamda uzun dalga yaklaкēmē halinde linear olmayan dalgalarēn yayēlēmē incelenmiк ve evolusyon denklemi olarak deĵ iкken katsayēlē Korteweg-deVries- Burgers (KdV-B) denklemi elde edilmiкtir. Bu denklem için ilerleyen dalga çözümü aranmēк ve deĵ iкen yarēçap nedeniyle eksen boyunca dalga hēzēnēn da deĵ iкtiĵ i gösterilmiкtir.

ABSTRACT

In this work, treating the artery as a prestressed thin elastic tube with variable radius and the blood as an incompressible Newtonian fluid with variable viscosity, the propagation of nonlinear waves in such a composite medium is studied, in the longwave approximation, through the use of reductive perturbation method and the variable coefficient Korteweg-deVries- Burgers (KdV-B) equation is obtained as the evolution equation. A progressive wave type of solution is presented for the evolution equations and it is shown that the wave speed is variable along the tube axis.

1.GĶRĶĶ

Küçük fakat sonlu genlikli dalgalarēn bükülebilir tüpler içerisindeki yayēlēmē problemi Johnson [1], Hashizume [2], Yomosa[3], Demiray [4-6] gibi bilim adamlarē tarafēndan incelenmiкtir. Bu tip problemleri incelemenin esas nedeni büyük damarlarda pals dalgalarēnēn yayēlēmē gibi biyolojik uygulama alanē bulmasēndandēr. Bütün bu çalēкmalarda, kan ideal bir akēкkan veya sabit viskoziteli Newton akēкkanē кeklinde modellenmiкtir. Viskoz akēкkan halinde tüp duvarēna tam yapēкma koкulunu saĵ latmak mümkün olmadēĵ ēndan, bu çalēкmalarēn büyük çoĵ unluĵ unda kan ideal akēкkan gibi iкleme sokulmuкtur. Araкtērēcēlar bu zorluklarē yenmek için alan denklemlerinin enkesit boyunca ortalamalarēnē alma veya tabakalı akışkan modeli gibi yollara başvurmuşlar [7], ancak doyurucu bir sonuç alamamışlardır. Bilindiği gibi plazma ve hücrelerden (özellikle alyuvarlar) oluşan kan sıkıştırılamayan ve Newtoniyen olmayan bir akışkandır. Büyük damarlarda kan akımı sırasında damar çeperindeki alyuvarlar merkeze doğru gider ve bu bölgelerde hücre yoğunluğu (hematokrit oranı) düşer, dolayısıyla viskozite düşer. Diğer yandan, Poiseuille akımından bilindiği gibi çepere yakın yerlerde kayma hızı yüksek değerlere ulaştığından bu bölgelerde viskozite merkeze göre düşüktür. Sonuç olarak dairesel silindirik borularda akım sırasında damar çeperine yakın yerlerde viskozite düşük, merkez kısımlarda ise yüksektir. İşte kanın bu akım özelliği nedeniyle araştırmacılar tabakalı akım modeli ortaya atmışlardır. Burada dış tabakayı ideal akışkan, iç tabakayı da viskoz akışkan olarak işleme sokmuşlardır. Ancak burada da tabakaların kalınlığı ve ara yüzeylerdeki kayma gerilmesi uyumsuzluğu hala çözümlenmemiş sorulardır.

Bu çalışmada, kanın yukarıda açıklanan özelliklerinden esinlenerek, değişken viskoziteli bir akışkan modeli ortaya atılmıştır. Bu modelde viskozitenin damar çeperinde sıfır, merkezde ise en büyük değerini aldığı varsayılmıştır. Kanı bu tip bir akışkan, damarı da öngerilmeli değişken yarıçaplı ince bir tüp kabul ederek böyle bir kompozit ortamda zayıf nonlinear dalgaların yayılımı problemi incelenmiştir. Uzun dalga yaklaşımı halinde indirgeyici perturbasyon yöntemi kullanarak evolüsyon denklemi olarak değişken katsayılı Korteweg-deVries- Burgers (KdV-B) denklemi elde edilmiştir. Bu evolüsyon denkleminin ilerleyen dalga tipi çözümü aranmış, değişken yarıçapın dalga hızına da değişken yaptığı gözlenmiştir.

2.TEMEL DENKLEMLER

2.1.Tüp Denklemleri

Başlangıç yarıçapı R_0 olan dairesel silindirik bir tüpün $P_0(Z^*)$ değişken iç basıncına maruz kaldığı düşünülürse, tüp üzerindeki herhangi bir noktanın konum vektörü

$$\mathbf{r}_0 = \left[r_0 - f^*(z^*) \right] \boldsymbol{e_r} + z^* \boldsymbol{e_z}, \quad z^* = \lambda_z Z^* \tag{1}$$

şeklinde yazılabilir. Burada λ_z eksenel doğrultudaki germeyi, r_0 tüpün koordinat merkezindeki şekil değiştirmiş yarıçapını, $f^*(z^*)$ yarıçap değişim fonksiyonunu, $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ ise silindirik koordinatlardaki baz vektörlerini göstermektedir.

Kalbin pompalama hareketi sonucu oluşan kan akımı sırasında tüpte radyal doğrultuda $u^*\left(z^*, t^*\right)$ dinamik yer değiştirmesi oluşacaktır. Damarın yataklanma koşulları nedeniyle eksenel yöndeki yer değiştirme ihmal edilecektir. Buna göre, tüp üzerindeki bir noktanın konum vektörü

$$\boldsymbol{r} = \left[r_0 - f^*(z^*) + u^* \right] + \boldsymbol{e_r} + z^* \boldsymbol{e_z} \tag{2}$$

şeklinde verilebilir. O halde meridyen ve yanal yöndeki germeler

$$\lambda_1 = \lambda_z \left[1 + (-f^{*}{}' + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})^2 \right]^{1/2}, \quad \lambda_2 = \frac{r_0 - f^* + u^*}{R_0} \tag{3}$$

şeklinde verilebilir. Burada $(\;)'$, ilgili büyüklüğün z^*'ye göre türevini göstermektedir.

Koordinat düzlemleriyle kesilmiş küçük bir tüp elemanı göz önüne alınırsa, tüpün radyal doğrultudaki hareket denklemi aşağıdaki biçimde verilebilir

$$-\frac{\mu}{\lambda_2}\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} + \lambda_z \mu R_0 \frac{\partial}{\partial z^*}\left[\left(-f^{*\prime} + \frac{\partial u'}{\partial z^*}\right)\frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1}\right] + \frac{R_0 P_r^*}{\lambda_z H}\lambda_1\lambda_2 - \rho_0 \frac{R_0}{\lambda_z}\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} = 0. \tag{4}$$

Burada Σ tüpün şekil değiştirme enerjisi fonksiyonunu, μ kayma modülünü P_r^* akışkan reaksiyon kuvvet yoğunluğunu, ρ_0 ise tüp malzemesinin kütle yoğunluğunu göstermektedir.

2.2. Akışkan Denklemleri

Bilimsel incelemeler kanın plazma adı verilen düşük viskoziteli bir sıvı ile hücrelerden oluştuğunu göstermektedir. Bu hücrelerin büyük çoğunluğu alyuvarlardır. Alınan bir kan numunesinde hücre hacminin kan hacmine oranına hematokrit oranı adı verilir. Yapılan deneysel çalışmalar artan hematokrit oranı ile viskozitenin arttığını, artan kayma hızı ile de viskozitenin düştüğünü göstermektedir. Silindirik bir boru içerisinde bir kan akımı düşünüldüğünde, Poiseuille akımından da anlaşılacağı gibi, boru çeperine yakın yerlerde kayma hızı çok büyük değerlere ulaşır, dolayısıyla buralarda viskozite düşüktür. Keza, merkeze yakın yerlerde hız yüksek çepere yakın yerlerde düşük olduğundan, Bernoulli yasasına göre çeperlerdeki basınç merkeze nazaran daha yüksektir. Bu basınç farkı radyal doğrultuda merkeze doğru bir basınç gradyantı oluşturur ve hücrelerin merkeze doğru hareketini sağlar ve bunun sonucu olarak da çepere yakın yerlerde hematokrit oranı oldukça düşük düzeylere iner. Silindirik boru içerisindeki akım göz önüne alındığında, çepere yakın yerlerde viskozite düşük, merkeze yakın yerlerde ise viskozite yüksektir. İşte kanın bu davranış biçimi nedeniyle tüp içi akımda çeşitli modeller ortaya atılmıştır. Bunlardan bir tanesi tabakalı akışkan modeli olup dış tabaka ideal akışkan çekirdek kısım ise viskoz akışkan olarak işleme sokulmaktadır. Ancak bu modelde tabakaların kalınlığının ne olacağı, viskoz akışkan bölgesindeki kayma gerilmesinin nasıl dengeleneceği gibi sorular cevapsız kalmaktadır.

İşte bu çalışmada, değişken viskoziteli akışkan modelinin yukarıdaki olumsuzlukları gidereceği ve boru içerisindeki kan akımını daha iyi karakterize edeceği düşünülerek böyle bir model ortaya atılmıştır. Bu modele göre viskozite radyal doğrultuda değişken, çeperde sıfır değerini almaktadır. Böyle bir viskoz akışkana ait hareket denklemleri ve sınır koşulları aşağıdaki gibi verilebilir

$$\frac{\partial V_r^*}{\partial t^*} + V_r^* \frac{\partial V_r^*}{\partial r} + V_z^* \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\rho_f}\frac{\partial \bar{P}}{\partial r}$$
$$-\nu_f(r)\left(\frac{\partial^2 V_r^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r^*}{\partial r} - \frac{V_r^*}{r^2} + \frac{\partial^2 V_r^*}{\partial z^{*2}}\right) - 2\nu_f'(r)\frac{\partial V_r^*}{\partial r} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial V_z^*}{\partial t^*}+V_r^*\frac{\partial V_z^*}{\partial r}+Vz^*\frac{\partial V_z^*}{\partial z^*}+\frac{1}{\rho_f}\frac{\partial \overline{P}}{\partial z^*}$$

$$-\nu\breve{E}_f(r)\left(\frac{\partial^2 V_z^*}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_z^*}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_z^*}{\partial z^{*2}}\right)-\nu\gamma'(r)\left(\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*}+\frac{\partial V_z^*}{\partial r}\right)=0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial V_r^*}{\partial r}+\frac{V_r^*}{r}+\frac{\partial V_z^*}{\partial z^*}=0, \tag{7}$$

ve sēnēr kokullarē

$$V^*_{|r=r_f}=\frac{\partial u^*}{\partial t^*}+\left(-f^{*'}+\frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)V_z^*\Big|_{r=r_f}$$

$$P_r^*=\frac{\lambda_z}{\lambda_1}\left[\overline{P}-2\rho_f\nu\breve{E}_f(r)\frac{\partial V_r^*}{\partial r}+\rho_f\nu\breve{E}_f(r)\left(-f^{*'}+\frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)\left(\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*}+\frac{\partial V_z^*}{\partial r}\right)\right]r=r_f. \tag{8}$$

Burada V_r^*, V_z^* radyal ve eksenel doĝrultudaki hēz bilekenlerini, $\overline{P}$ basēnç fonksiyonunu, ρ_f akēkkanēn kütle yoĝunluĝunu, $\nu\breve{E}$ kinematik viskoziteyi, $\gamma(r)$ viskozite deĝikim fonksiyonunu, r_f ise tüpün nihai yarēçapēnē göstermektedir.

Uygun boyutsuzlaktērma parametreleri tanēmlayarak akaĝēdaki boyutsuz alan denklemleri elde edilir

$$P_r=\frac{1}{\lambda_\theta-f+u}\left[\frac{m}{\lambda_z}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{\lambda_z}\frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda_2}-\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{-f'+\partial u/\partial z}{\left[1+(-f'+\frac{\partial u}{\partial z})^2\right]^{1/2}}\right\}\right]. \tag{9}$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_r}{\partial x}+V_z\frac{\partial V_r}{\partial z}+\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}$$

$$-\nu\breve{E}_f(x)\left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial V_r}{\partial x}-\frac{V_r}{x^2}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}\right)-2\nu\breve{E}_f'(x)\frac{\partial V_r}{\partial x}=0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_z}{\partial x}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}+\frac{\partial \overline{p}}{\partial z}$$

$$-\nu\breve{E}_f(x)\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial V_z}{\partial x}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)-\nu\breve{E}_f'(x)\left(\frac{\partial V_r}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)=0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial x}+\frac{V_r}{x}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0, \tag{12}$$

ve sēnēr kokullarē

$$V_r\Big|_{x=\lambda_{\theta-f+u}}=\frac{\partial u}{\partial t}+(-f'+\frac{\partial u}{\partial z})V_z\Big|_{x=\lambda_{\theta-f+u}}$$

$$P_r=\left[\overline{p}-2\nu\breve{E}_f(x)\frac{\partial V_r}{\partial x}+\nu\breve{E}_f(x)\left(-f'+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial Vz}{\partial x}+\frac{\partial V_r}{\partial z}\right)\right]_{x=\lambda_{\theta-f+u}} \tag{13}$$

ĸeklini alēr. Burada $x = r/R_0$ ve $\lambda_\theta = r_0/R_0$ biçiminde tanēmlanmēĸtēr.

3.UZUN DALGA YAKLAĶIKLIĴ I

Bu kēsēmda, içi akēĸkan ile dolu öngerilmeli bir elastik tüp içerisine küçük fakat sonlu genlikli uzun dalgalarēn yayēlmasē incelenecektir. Bunun için uzun dalga yaklaĸēmē esas alēnacak ve indirgeyici pertürbasyon yöntemi [8] kullanēlacaktēr. Ķncelenecek problemin bir sēnēr deĵ er problemi olmasē nedeniyle aĸaĵ ēdaki ĸekilde gerilmiĸ koordinat takēmē kullanēlacaktēr

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(z - ct), \qquad \tau = \varepsilon^{3/2} z. \tag{14}$$

Burada ε küçük bir parametre olup nonlinearliĵ in, dispersiyonun ve dissipasyonun mertebesini karakterize etmekte, c ise daha sonra belirlenecek olan bir ölçüt parametresidir. (14) denkleminden z çözülür, $z = \tau/\varepsilon^{3/2}$ ve $f(z)$ ifadesinde yerine konursa $f(z) = f\left(\tau/\varepsilon^{3/2}\right)$ ĸeklini alēr. Tüp yarēçapēndaki deĵ iĸimin etkisini hesaba katabilmek için $f(z)$ fonksiyonunun mertebesinin $\varepsilon^{5/2}$ olmasē gerekir. Ķncelenmekte olan problem için $f(z)$ fonksiyonunun $f(z) = \varepsilon h(\tau)$ ĸeklinde olduĵ u varsayēlacaktēr. Ayrēca, denklemlerde görülen deĵ iĸkenlerin aĸaĵ ēdaki biçimde ε parametresi cinsinden bir asimptotik seriye açēlacaĵ ē kabul edilecektir.

$$\begin{aligned}
&u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots\ldots, && V_r = \varepsilon^{1/2}\left(\varepsilon V_r^{(1)} + \varepsilon^2 V_r^{(2)} + \ldots\right),\\
&V_z = \varepsilon V_z^{(1)} + \varepsilon^2 V_r^{(2)} + \ldots, && P_r = P_r^{(0)} + \varepsilon P_r^{(1)} + \varepsilon^2 P_r^{(2)} + \ldots,\\
&\bar{p} = \bar{p}_0 + \varepsilon \bar{p}_1 + \varepsilon^2 \bar{p}_2 + \ldots, && \gamma(x) = \gamma_0(x) + \varepsilon\gamma_1(x) + \varepsilon^2\gamma_2(x) + \ldots
\end{aligned} \tag{15}$$

Burada viskozite deĵ iĸim fonksiyonu $\gamma(x)$ aĸaĵ ēdaki gibi lineer kabul edilmiĸtir.

$$\gamma(x) = 1 - \frac{x}{\lambda_\theta - \varepsilon h(\tau) + u}. \tag{16}$$

Buna göre $\gamma_0(x), \gamma_1(x)$ ve $\gamma_2(x)$ katsayē fonksiyonlarē aĸaĵ ēdaki biçimde verilebilir

$$\gamma_0(x) = 1 - \frac{x}{\lambda_\theta}, \;\; \gamma_1(x) = \frac{x}{\lambda_\theta^2}(u_1 - h), \; \gamma_2(x) = \frac{x}{\lambda_\theta^2}\left[u_2 - \frac{(u_1 - h)^2}{\lambda_\theta}\right]. \tag{17}$$

(15) ve (17) açēlēmlarē (9)-(13) de verilen denklemlerde yerine konur ve ε'nun benzer kuvvetlerinin katsayēlarē sēfēra eĸitlenirse aĸaĵ ēdaki denklemler elde edilir.

O (ε) mertebesinden denklemler

$$\frac{\partial \overline{p}_1}{\partial x}=0,\;\; \frac{\partial V_r^{(1)}}{\partial x}+\frac{V_r^{(1)}}{x}+\frac{\partial V_z^{(1)}}{\partial \xi}=0$$

$$-c\frac{\partial V_z^{(1)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \overline{p}_1}{\partial \xi}+\nu\gamma_0(x)\left(\frac{\partial^2 V_z^{(1)}}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial V_z^{(1)}}{\partial x}\right)-\nu\gamma_0'(x)\frac{\partial V_z^{(1)}}{\partial x}=0, \tag{18}$$

ve sınır koşulları

$$V_r^{(1)}\Big|_{x=\lambda_\theta}=-c\frac{\partial u_1}{\partial \xi},\qquad \overline{p}_1\Big|_{x=\lambda_\theta}=P_r^{(1)}. \tag{19}$$

O (ε^2) mertebesinden denklemler

$$-c\frac{\partial V_r^{(1)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \overline{p}_2}{\partial x}-\nu\gamma_0(x)\left(\frac{\partial^2 V_r^{(1)}}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial V_r^{(1)}}{\partial x}-\frac{V_r^{(1)}}{x^2}\right)-2\nu\gamma_0'(x)\frac{\partial V_r^{(1)}}{\partial x}=0,$$

$$-c\frac{\partial V_z^{(2)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \overline{p}_2}{\partial \xi}+\frac{\partial \overline{p}_1}{\partial \tau}+V_r^{(1)}\frac{\partial V_z^{(1)}}{\partial x}+V_z^{(1)}\frac{\partial V_z^{(1)}}{\partial \xi}$$

$$-\nu\gamma_0(x)\left(\frac{\partial^2 V_z^{(2)}}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial V_z^{(2)}}{\partial x}+\frac{\partial^2 V_z^{(1)}}{\partial \xi^2}\right)-\nu\gamma_1(x)\left(\frac{\partial^2 V_z^{(1)}}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial V_z^{(1)}}{\partial x}\right)$$

$$-\nu\gamma_0'(x)\left(\frac{\partial V_r^{(1)}}{\partial \xi}+\frac{\partial V_z^{(2)}}{\partial x}\right)-\nu\gamma_1'(x)\frac{\partial V_z^{(1)}}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial V_r^{(2)}}{\partial x}+\frac{V_r^{(2)}}{x}+\frac{\partial V_z^{(2)}}{\partial \xi}+\frac{\partial V_z^{(1)}}{\partial \tau}=0, \tag{20}$$

ve sınır koşulları

$$\left[V_r^{(2)}+(u_1-h)\frac{\partial V_r^{(1)}}{\partial x}\right]\Big|_{x=\lambda_\theta}=-c\frac{\partial u_2}{\partial \xi}+\frac{\partial u_1}{\partial \xi}V_z^{(1)}\Big|_{x=\lambda_\theta}$$

$$P_r^{(2)}=\left[\overline{p}_2+(u_1-h)\frac{\partial \overline{p}_1}{\partial x}-2\nu\gamma_0(x)\frac{\partial V_r^{(1)}}{\partial x}\right]\Big|_{x=\lambda_\theta} \tag{21}$$

Burada, $\overline{\nu}$ viskozite katsayısının $O(\varepsilon^{1/2})$ mertebesinde, yani $\overline{\nu}=\varepsilon^{1/2}\nu$ şeklinde, olduğu kabul edilmiştir.

Denklemleri tamamlayabilmek için $P_r^{(1)}$ ve $P_r^{(2)}$ terimlerinin u radyal yer değiştirmesi cinsinden açık ifadelerini bilmek gerekiyor. Bunun için λ_1,λ_2 germelerinin seri açılımlarını bilmek gerekiyor. Gerekli açılımlar yapılırsa

$$\lambda_1\approx\lambda_z,\quad \lambda_2=\lambda_\theta+\varepsilon\left(u_1-h\right)+\varepsilon^2 u_2+\ldots \tag{22}$$

elde edilir. Bu açılımlar (13) denklemiyle belirlenen P_r ifadesinde yerine konursa $P_r^{(1)}$ ve $P_r^{(2)}$ ifadeleri aşağıdaki biçimde verilebilir

$$P_r^{(1)} = \beta_1 (u_1 - h), \tag{23}$$

$$P_r^{(2)} = \left(\frac{mc^2}{\lambda_\theta \lambda z} - \beta_0 \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \beta_1 u_2 + \beta_2 (u_1 - h)^2. \tag{24}$$

Burada $\beta_{0,} \beta_1$ ve β_2 katsayıları aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır

$$\beta_0 = \frac{1}{\lambda_\theta} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_z}, \quad \beta_1 = \frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \lambda_\theta^2} - \frac{1}{\lambda_z \lambda_\theta^2} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_\theta}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \lambda_\theta^3} - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta}. \tag{25}$$

3.1 Alan Denklemlerinin Çözümü

Bu kısımda (18)-(24) arasında verilen alan denklemlerinin çözümü, sonuçta da bu büyüklükleri yönetecek evolüsyon denklemleri elde edilecektir. (18) ve (19) denklemleriyle verilen $O(\varepsilon)$ mertebesindeki denklemlerin çözümünden

$$u_1 = U(\xi, \tau), \quad \bar{p}_1 = \beta_1 (U - h), \quad V_z^{(1)} = \frac{\beta_1}{c} \left[U + w_1(\tau) \right]$$

$$V_r^{(1)} = -\frac{\beta_1}{2c} \frac{\partial U}{\partial \xi} x, \quad \beta_1 = \frac{2c^2}{\lambda_\theta}, \tag{26}$$

elde edilir. Burada $w_1(\tau)$ eksenel yöndeki daimi akımı karakterize eden bir fonksiyon, $U(\xi, \tau)$ ise bilinmeyen bir fonksiyon olup evolüsyon denklemi daha sonra elde edilecektir.

(26) ile verilen çözümler (20), (21) ve (24) denklemlerinde yerine konursa $O(\varepsilon^2)$ mertebesinden diferansiyel denklemler aşağıdaki şekli alır

$$\frac{\partial \bar{p}_2}{\partial x} + \frac{\beta_1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} x - \frac{\nu \beta_1}{\lambda_\theta c} \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0,$$

$$-c \frac{\partial V_z^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial \xi} + \beta_1 \frac{\partial U}{\partial \tau} - \beta_1 \frac{dh}{d\tau} + \frac{2\beta_1}{\lambda_\theta} U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{2\beta_1}{\lambda_\theta} w_1(\tau) \frac{\partial U}{\partial \xi}$$

$$-\nu \left(1 - \frac{x}{\lambda_\theta} \right) \left(\frac{\partial^2 V_z^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial V_z^{(2)}}{\partial x} \right) + \frac{\nu}{\lambda_\theta} \frac{\partial V_z^{(2)}}{\partial x} + \frac{\nu \beta_1}{2\lambda_\theta c} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} x - \frac{\nu \beta_1}{c} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0,$$

$$\frac{\partial V_r^{(2)}}{\partial x} + \frac{V_r^{(2)}}{x} + \frac{\partial V_z^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\beta_1}{c} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\beta_1}{c} \frac{dw_1(\tau)}{d\tau} = 0, \tag{27}$$

ve sınır koşulları

$$V_r^{(2)} \Big|_{x=\lambda_\theta} = -c \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{3\beta_1}{2c} U \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\beta_1}{2c} h \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\beta_1}{c} w_1(\tau) \frac{\partial U}{\partial \xi},$$

$$\bar{p}_2\Big|_{x=\lambda_\theta} = \left(\frac{mc^2}{\lambda_\theta\lambda_z} - \beta_0\right)\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2} + \beta_1 u_2 + \beta_2\left(U-h\right)^2 \tag{28}$$

(27) denklemi (28) ile belirlenen sınır koşulları altında çözülürse

$$\bar{p}_2 = p_2 - \frac{\beta_1}{4}\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}x^2 + \frac{\nu\beta_1}{\lambda_\theta c}\frac{\partial U}{\partial\xi}x$$

$$V_z^{(2)} = -\frac{\beta_1}{4c}\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}x^2 + w_2(\xi,\tau)$$

$$V_\gamma^{(2)} = \frac{\beta_1}{16c}\frac{\partial^3 U}{\partial\xi^3}x^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_2}{\partial\xi} + \frac{\beta_1}{c}\frac{\partial U}{\partial\tau} + \frac{\beta_1}{c}\frac{dw_1}{d\tau}\right)x, \tag{29}$$

elde edilir. Burada w_2 ve p_2 bilinmeyen iki fonksiyon olup aşağıdaki denklemi sağlarlar

$$-c\frac{\partial w_2}{\partial\xi} + \frac{\partial p_2}{\partial\xi} + \beta_1\frac{\partial U}{\partial\tau} - \beta_1\frac{dh}{d\tau} + \frac{2\beta_1}{\lambda_\theta}U\frac{\partial U}{\partial\xi} + \frac{2\beta_1}{\lambda_\theta}w_1(\tau)\frac{\partial U}{\partial\xi} = 0. \tag{30}$$

(28) de verilen sınır koşulları kullanılırsa aşağıdaki evolüsyon denklemi elde edilir

$$\frac{\partial U}{\partial\tau} + \left(\frac{5}{2\lambda_\theta} + \frac{\beta_2}{\beta_1}\right)U\frac{\partial U}{\partial\xi} + \left(\frac{\lambda_\theta^2}{16} + \frac{m}{4\lambda_z} - \frac{\beta_0}{2\beta_1}\right)\frac{\partial^3 U}{\partial\xi^3} - \frac{\nu}{2c}\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}$$
$$+\left[\frac{2}{\lambda_\theta}w_1(\tau) - \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{1}{2\lambda_\theta}\right)h(\tau)\right]\frac{\partial U}{\partial\xi} + \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left(w_1 - h\right) = 0. \tag{31}$$

Bu evolüsyon denklemi $U=0$ hali için de geçerli olmalıdır. Bu ise ancak ve ancak $w_1(\tau) = h(\tau)$ olmasıyla mümkündür. Bu durumda (31) evolüsyon denklemi aşağıdaki şekli alır

$$\frac{\partial U}{\partial\tau} + \mu_1 U\frac{\partial U}{\partial\xi} - \mu_2\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2} + \mu_3\frac{\partial^3 U}{\partial\xi^3} - \mu_4 h(\tau)\frac{\partial U}{\partial\xi} = 0. \tag{32}$$

Burada μ_1, μ_2, μ_3 ve μ_4 katsayıları aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır.

$$\mu_1 = \left(\frac{5}{2\lambda_\theta} + \frac{\beta_2}{\beta_1}\right),\quad \mu_2 = \frac{\nu}{2c},\quad \mu_3 = \left(\frac{\lambda_\theta^2}{16} + \frac{m}{4\lambda_z} - \frac{\beta_0}{2\beta_1}\right),\quad \mu_4 = \frac{\beta_2}{\beta_1} - \frac{3}{2\lambda_\theta}. \tag{33}$$

(32) evolüsyon denklemi değişken katsayılı Korteweg-deVries-Burgers (KdV-B) denklemi olarak adlandırılır. Bu denklemde

$$\tau' = \tau,\ \xi' = \xi + \mu_4\int_0^\tau h(s)ds \tag{34}$$

şeklinde bir koordinat dönüşümü kullanılırsa aşağıdaki sabit katsayılı KdV-B denklemi elde edilir

$$\frac{\partial U}{\partial\tau'} + \mu_1 U\frac{\partial U}{\partial\xi'} - \mu_2\frac{\partial^2 U}{\partial\xi'^2} + \mu_3\frac{\partial^3 U}{\partial\xi'^3} = 0. \tag{35}$$

Bilindiği gibi bu evolüsyon denklemi

$$U=\frac{a}{\mu_1}+\frac{3\mu_2^2}{25\mu_1\mu_2}(\sec h^2\xi+2\tanh\xi),$$
$$\xi=\frac{\mu_2}{10\mu_3}\left[\xi-a\tau+\mu_4\int_0^{\tau}h(s)d_1\right] \qquad (36)$$

şeklinde ilerleyen bir dalga çözümüne sahiptir [9]. Faz fonksiyonu ifadesinden görüleceği gibi dalga çizgileri artık doğrular değil (ξ,τ) düzleminde bir eğriler ailesinden ibarettir. Bunun bir sonucu olarak da dalga hızı sabit olmayıp eksenel doğrultudaki koordinatın bir fonksiyonudur. Burada τ 'nun uzaysal, ξ 'nin de zaman değişkeni olduğu göz önünde bulundurulursa dalga hızı

$$v_d=\frac{d\tau}{d\xi}=\frac{1}{a-\mu_4 h(\tau)} \qquad (37)$$

şeklinde verilir. Bu değişken hız damarlardaki daralmanın (stenosis) bir sonucudur.

4.SONUÇ

Bu çalışmada, damarı değişken yarıçaplı ve öngerilmeli ince bir tüp, akışkanı da sıkıştırılamayan ve değişken viskoziteli bir akışkan gibi işleme sokarak, uzun dalga limiti halinde, ortamda zayıf nonlineer dalgaların yayılımı problemi incelenmiş ve evolusyon denklemi olarak değişken katsayılı Korteweg-deVries-Burgers(KdV-B) denklemi elde edilmiştir. Uygun bir değişken dönüşümü ile bu evolusyon denklemi bilinen sabit katsayılı KdV-B denklemine dönüştürülerek bu denkleme ilerleyen dalga çözümü aranmıştır. Elde edilen sonuçlara göre: (1) dalga çizgileri birer doğrular değil eğriler şeklinde ortaya çıkmaktadır. (2) Bunun bir sonucu olarak, dalga hızı da eksenel koordinat ile değişmektedir. Bu her iki değişime de stenosisin, damar yarıçapındaki değişimin, neden olduğu söylenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Johnson, R. S.,"A non-linear equation incorporating damping and dispersion", Journal of Fluid Mechanic, 42, 49-60, 1970.

[2] Hashizume, Y., "Nonlinear Pressure Waves in a Fluid- Filled Elastic Tube", J. Phys. Soc. Japan, 54, 3305-3312, 1985.

[3] Yomosa, S., "Solitary Waves in Large Blood Vessels, J. Phys. Soc.Japan, 56, pp.506-520, 1987.

[4] Demiray, H., "Solitary waves in prestressed elastic tubes", Bull. Math. Biol, 58, 939-955, 1996.

[5] Demiray, H., "Slowly varying solitary waves in an elastic tube filled with a viscous fluid", ARI *(formely, the Bulletin of Technical University of İstanbul),* 51, 98-102,1998.

[6] Demiray, H., "Solitary waves in a tapered prestressed fluid-filled elastic tube", Z.angew. Mat. Phys, 55 , 282-294, 2004.

[7] Demiray, H., "Solitary waves in elastic tubes filled with a layered fluid", Int. J. Eng. Sci, 39, 629-640, 2001

[8] Jeffrey, A. and T. Kawahara, T.,ñAsymptotic methods in nonlinear wave theoryò, Pitman, Boston, 1981
[9] Demiray, H., ñA note on the travelling wave solution to the KdV-Burgers equationò, Wave Motion, 38, 367-369, 2003